

3- практикалық сабақ

Рационал функцияларды қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеу арқылы интегралдау.

1. Қарапайым рационал бөлшектер және оларды интегралдау

Мысал 1. Бұрыс бөлшек берілсін

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$$

Онда оның алымындағы көпмүшелікті бөліміндегі көпмүшелікке бөлу арқылы (көпмүшелікті көпмүшелікке бөлу ережесі), мынадай қосындыны аламыз:

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x + 6}{x^2 + 2x + 1},$$

Көпмүшелікті интегралдау қиындық туғызбайды, ал негізгі қиындық дұрыс бөлшекті интегралдауда.

Мысал 2. $\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)}$ бөлшегін қарапайым бөлшектерге жіктейік.

(5) негізінде: $\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{x-2}$ аламыз. Ортақ

бөлімге келтіріп, алымдарын теңестірсек:

$$x^2 + 2 = A(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + A_2(x+1)^2(x-2) + B(x+1)^2, \quad (6)$$

немесе

$$x^2 + 2 = (A_2 + B)x^3 + (A_1 + 3B)x^2 + (A - A_1 - 3A_2 + 3B)x + (-2A - 2A_1 - 2A_2 + B).$$

x^3, x^2, x^1, x^0 (бос мүше) коэффициенттерін теңестіре отырып, мынадай теңдеулер жүйесін аламыз: $0 = A_2 + B, 1 = A_1 + 3B, 0 = A - A_1 - 3A_2 + 3B, 2 = -2A - 2A_1 - 2A_2 + B.$

Жүйені шешсек: $A = -1, A_1 = \frac{1}{3}, A_2 = -\frac{2}{9}, B = \frac{2}{9}.$

Мысал 3.

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} \Rightarrow x = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1)$$

$$x=1: 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$x=0: 0 = -B + C \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

x^2 -тың коэффициенттерін теңестірсек: $0 = A + C \Rightarrow A = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \ln|x-1| + c.$$

I. Келесі интегралдарды табу керек:

1. $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$; (Жауабы: $-\frac{1}{3(x-1)^3} + C$)

2. $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$; (Жауабы: $-\frac{1}{4(2x+1)^2} + C$)
3. $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 2x^3 + 3}$; (Жауабы: $\frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(x^2+1)}{\sqrt{2}} + C$)
4. $\int \frac{x dx}{2x^2 + 2x + 5}$; (Жауабы: $\frac{1}{4} \ln(2x^2 + 2x + 5) - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{3} + C$)
5. $\int \frac{x-2}{x^2 - 4x + 7} dx$; (Жауабы: $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 7) + C$)

Қолданылған оқулықтар:

1. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика I. ШҚМТУ, 2008
2. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика II. ШҚМТУ, 2008
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2 М.:Наука, 2011г.
4. ЖҮТ Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 1,2,3 бөлім Бастау, 2008
- 5 Сборник ИДЗ по высшей математике. Под редакцией Рябушко А.П., ч.1,2,3 Минск, «ВШ», 2011г.